Grupos de Poincaré y (Anti) de Sitter

Escuela Programa de Doctorado en Ciencias Físicas

Consorcio UBB-UNAP

Patricio Salgado*,

Facultad de Ciencias, ICEN, Universidad Arturo Prat

Javiera Cerda**

Universidad Nacional Andrés Bello

*patsalgado@unap.cl

**javiera_andreacerda@hotmail.com

1. Grupo de Lorentz y de Poincaré

1.1. Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz son esenciales en la teoría de la relatividad especial de Albert Einstein, quien las obtuvo a partir de cuatro principios fundamentales

I. Principio de isotropía y homogeneidad del espacio

II. Principio de homogeneidad del tiempo

III. Postulado de la constancia de la velocidad de la luz

IV. Principio de la relatividad de Einstein.

Sea S un sistema de referencia inercial con coordenadas (x, y, z, t) y S' un sistema de referencia que se mueve a velocidad constante $\vec{v}$ respecto a S, con coordenadas (x', y', z', t'), las transformaciones de Lorentz son

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1.1}$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{1.2}$$
$$y' = y \tag{1.3}$$
$$z' = z \tag{1.4}$$

en donde γ es el factor de Lorentz, dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.5}$$

reescribiendo las transformaciones de Lorentz de la forma

$$x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}(ct)\right) \tag{1.6}$$
$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \tag{1.7}$$
$$y' = y \tag{1.8}$$
$$z' = z \tag{1.9}$$

y definiendo $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, tenemos que

$$x'^1 = \gamma\left(x^1 - \frac{v}{c}x^0\right) \tag{1.10}$$
$$x'^0 = \gamma\left(x^0 - \frac{v}{c}x^1\right) \tag{1.11}$$
$$x'^2 = x^2 \tag{1.12}$$
$$x'^3 = x^3 \tag{1.13}$$

es decir,

$$x'^0 = \gamma x^0 - \gamma\frac{v}{c}x^1 \tag{1.14}$$

$$x'^1 = -\gamma\frac{v}{c}x^0 + \gamma x^1 \tag{1.15}$$

$$x'^2 = x^2 \tag{1.16}$$

$$x'^3 = x^3 \tag{1.17}$$

lo que se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

luego, si llamamos

$$x^\mu = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

podemos escribir (1.18) como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1.20}$$

este tipo de transformaciones mantiene invariante el intervalo de Minkowski entre dos eventos, es decir

$$s^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu \tag{1.21}$$

en donde $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski en relatividad especial y tiene la forma

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \eta^{\mu\nu} \tag{1.22}$$

1.2. Grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz es el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz que mantienen invariante la estructura del espacio-tiempo en la teoría de la relatividad especial de Einstein. Se define como el grupo de transformaciones lineales de coordenadas

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1.23}$$

que deja invariante la forma bilineal

$$s^2 = x \cdot x = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{1.24}$$

El grupo de transformaciones de un espacio dotado de las coordenadas $(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$, que deja invariante la forma bilineal

$$(y_1^2 + \ldots + y_m^2) - (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{1.25}$$

es conocido como el grupo ortogonal $O(n,m)$. Usando esta nomenclatura, el grupo de Lorentz se denota por $O(1,3)$. Por otro lado, las transformaciones en donde $\det \Lambda = +1$ son llamadas transformaciones propias. El subgrupo de $O(1,3)$ con $\det \Lambda = +1$ es llamado el grupo especial ortogonal $SO(1,3)$.

La constancia de la velocidad de la luz nos dice que $s'^2 = s^2$, es decir que

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta \quad \longleftrightarrow \quad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda \tag{1.26}$$

Del estudio de las álgebras de Lie, sabemos que si $\Lambda \in SO(1,3)$, entonces

$$\Lambda(t) = e^t \quad \longrightarrow \quad \Lambda^\mu_\nu(t) = (e^{ta})^\mu_\nu \tag{1.27}$$

donde t es un parámetro real y a son los generadores del grupo de $SO(1,3)$, es decir, una base de $SO(1,3)$.
En la vecindad de $1_{SO(1,3)}$, una transformación $\Lambda \in SO(1,3)$ puede ser escrita como

$$\Lambda = 1_{SO(1,3)} + \omega \longrightarrow \Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \tag{1.28}$$

en donde

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \tag{1.29}$$

luego, podemos escribir las transformaciones de Lorentz como

$$x'^\mu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) x^\nu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu \tag{1.30}$$

por lo que la variación de x^μ nos queda

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu \tag{1.31}$$

de (1.27-1.28) vemos que

$$\Lambda(t) = e^\omega = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma}} \longrightarrow \Lambda^\mu_\nu = \left[e^{-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma}} \right]^\mu_\nu \tag{1.32}$$

donde $J_{\rho\sigma}$ es una base del álgebra de Lie, e i es introducido para que $J_{\rho\sigma}$ sean hermíticas. Reemplazando esto en (1.31)

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= x'^\mu - x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu - x^\mu = \left[e^{-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}J_{\rho\sigma}}\right]^\mu_\nu x^\nu - x^\mu && (1.33) \\ &= \left[\delta^\mu_\nu - \frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(J_{\rho\sigma})^\mu_\nu\right] x^\nu - x^\mu && (1.34) \\ &= x^\mu - \frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(J_{\rho\sigma})^\mu_\nu x^\nu - x^\mu && (1.35) \\ &= -\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(J_{\rho\sigma})^\mu_\nu x^\nu && (1.36) \end{aligned}$$

luego, podemos escribir

$$\omega^\mu_\nu = -\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(J_{\rho\sigma})^\mu_\nu \tag{1.37}$$

lo que significa que los generadores del grupo de Lorentz están dados por

$$(J_{\rho\sigma})^\mu_\nu = i(\eta_{\sigma\nu}\delta^\mu_\rho - \eta_{\rho\nu}\delta^\mu_\sigma) \tag{1.38}$$

los cuales satisfacen la siguiente relación de conmutación

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}) \tag{1.39}$$

1.3. Grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré es el producto semidirecto del grupo de Lorentz $SO(1,3)$ y el grupo de traslaciones T_4

$$ISO(1,3) = SO(1,3) \oslash T_4 \tag{1.40}$$

en donde $SO(1,3)$ es generado por

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \tag{1.41}$$

mientrás que T_4 es generado por

$$P_\mu = i\partial_\mu = i(\partial_0, \partial_i) \quad ; \quad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} \quad ; \quad x^0 = ct \tag{1.42}$$

Los generadores $J_{\mu\nu}$ y P_μ satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [P_\alpha, P_\beta] &= 0 && (1.43) \\ [J_{\alpha\beta}, P_\gamma] &= -i(\eta_{\alpha\gamma}P_\beta - \eta_{\beta\gamma}P_\alpha) && (1.44) \\ [J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] &= -i(\eta_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} + \eta_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} - \eta_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - \eta_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}) && (1.45) \end{aligned}$$

Rotaciones espaciales y boosts: es con frecuencia conveniente desdoblar ésta álgebra, rearreglando las 6 componentes de $J^{\mu\nu}$ en dos vectores espaciales, a saber rotaciones espaciales y boosts, definiendo

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk} \quad \longrightarrow \quad J_{mn} = \epsilon_{mnk}J_k \tag{1.46}$$

$$B_i = \frac{1}{c}J_{0i} \quad \longrightarrow \quad J_{0i} = cB_i \tag{1.47}$$

Recordando (1.42)

$$J_{jk} = i(x_j\partial_k - x_k\partial_j) \tag{1.48}$$

tenemos que

$$J_{0i} = i(x_0\partial_i - x_i\partial_0) = i\left(ct\partial_i - \frac{x_i}{c}\partial_t\right) \tag{1.49}$$

Luego

$$B_i = it\partial_i - \frac{i}{c^2}x_t\partial_t \tag{1.50}$$

$$= it\partial_i - \frac{i}{c^2}x_i\partial_t \tag{1.51}$$

del mismo modo, desdoblamos las 4 componentes de P_λ, en un vector espacial y un escalar temporal, definiendo

$$P_i = i\partial_i \qquad P_0 = i\partial_0 = \frac{H}{c} = \frac{i\partial_t}{c} \qquad H = i\partial_t \tag{1.52}$$

1.4. Álgebra de Poincaré

Tenemos que las reglas de conmutación del álgebra de Poincaré son

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \tag{1.53}$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k \tag{1.54}$$

$$[B_i, H] = -iP_i \tag{1.55}$$

$$[J_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k \tag{1.56}$$

$$[J_i, H] = 0 \tag{1.57}$$

$$[P_i, P_j] = 0 \tag{1.58}$$

$$[P_i, H] = 0 \tag{1.59}$$

$$[P_i, B_j] = \frac{i}{c^2}\delta_{ij}H \tag{1.60}$$

$$[B_i, B_j] = -\frac{i}{c^2}\epsilon_{ijk}J_k \tag{1.61}$$

La elección del factor c en la definición de K^i y H es motivada por la consideración de que K^i debe ser el generador de boosts en función de $\vec{v}$ y no de $\vec{v}/c$, y que H debe generar traslaciones temporales en t, y no con $x^0 = ct$.

2. Límites no-relativistas del grupo de Poincaré

2.1. Álgebra de Galileo

El álgebra de Galileo puede ser obtenida a partir del álgebra de Poincaré, tomando el límite $c \to \infty$, es decir $1/c^2 \to 0$.
Hemos visto que los generadores del grupo de Poincaré vienen dados por

I. el generador de rotaciones

$$J_i = i\epsilon_{ijk} x_j \partial_k \tag{2.1}$$

II. el generador de boosts

$$B_i = \frac{i}{c}(x_0 \partial_i - x_i \partial_0) = it\partial_i - \frac{i}{c^2} x_i \partial_t = G_i - \frac{i}{c^2} x_i \partial_t \tag{2.2}$$

en donde G_i es el generador de boosts de Galileo

$$G_i = \frac{i}{c} x_0 \partial_i = it\partial_i \tag{2.3}$$

III. los generadores de traslaciones espaciales y temporales

$$P_i = i\partial_i \qquad P_0 = i\partial_0 = \frac{H}{c} = \frac{i\partial_t}{c} \qquad H = i\partial_t \tag{2.4}$$

de estas últimas tres expresiones vemos que si tomamos el límite $c \to \infty$ obtenemos los generadores del grupo de Galileo

$$\lim_{c\to\infty} J_i = J_i \tag{2.5}$$
$$\lim_{c\to\infty} P_i = P_i \tag{2.6}$$
$$\lim_{c\to\infty} H = H \tag{2.7}$$
$$\lim_{c\to\infty} B_i = it\partial_i = tP_i \equiv G_i \tag{2.8}$$

de manera que los generadores para el álgebra de Galileo vienen dados por $\{J_i, G_i, B_i, H\}$, donde

$$J_i = i\epsilon_{ijk} x_j \partial_k, \qquad G_i = it\partial_i, \qquad P_i = i\partial_i, \qquad H = E = i\partial_t \tag{2.9}$$

los cuales satisfacen las relaciones de conmutación que se obtienen de las relaciones de conmutación del álgebra de Poincaré

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k && (2.10)\\
[J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k && (2.11)\\
[G_i, H] &= -iP_i && (2.12)\\
[J_i, G_j] &= i\epsilon_{ijk}G_k && (2.13)\\
[J_i, H] &= 0 && (2.14)\\
[P_i, P_j] &= 0 && (2.15)\\
[P_i, H] &= 0 && (2.16)\\
[P_i, G_j] &= 0 && (2.17)\\
[G_i, G_j] &= 0 && (2.18)
\end{aligned}$$

la cual es llamada álgebra de Galileo.

2.2. Álgebra de Bargmann

Notemos que al tomar el límite $c \to \infty$ en el álgebra de Poincaré, uno es conducido a un cambio estructural en el álgebra de Poincaré. Este límite en el álgebra de Poincaré es cuestionable debido a la presencial del conmutador

$$[P_i, B_j] = \frac{1}{c^2}\delta_{ij}H \tag{2.19}$$

de acuerdo con la teoría de la relatividad especial $H = mc^2$ con $m = \gamma m_0$, por lo que se tiene que $H \to \infty$ cuando $c \to \infty$, lo que conduce a que el lado derecho sea ∞/∞. Sin embargo, si recordamos que

$$H = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0}{c^2}}} \simeq m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \cdots\right) \tag{2.20}$$

luego tenemos que

$$H = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \cdots = m_0 c^2 + \tilde{H} \tag{2.21}$$

por lo que el conmutador ahora nos queda

$$[P_i, B_j] = \frac{i}{c^2}\delta_{ij}\left(m_0 c^2 + \tilde{H}\right) = i\delta_{ij}\left(m_0 + \frac{\tilde{H}}{c^2}\right) \tag{2.22}$$

esto implica que en el límite cuando $c \to \infty$

$$[P_i, G_j] = i\delta_{ij} m_0 \tag{2.23}$$

de este modo, al reemplazar en el álgebra de Galileo el conmutador $[P_i, G_j] = 0$ por el conmutador $[P_i, G_j] = i\delta_{ij}m_0$, obtenemos el álgebra de Bargmann. Este resultado puede ser considerado un álgebra si se interpreta la masa en reposo como un generador adicional que conmuta con todos los otros generadores. Desde el punto de vista matemático, esta es un álgebra 11-dimensional que corresponde a una extensión central del álgebra de Galileo, donde m_0 es la carga central.

3. Álgebra de Carroll

En 1965, J. M. Lévy-Leblond demostró que para que la aproximación galileana del grupo de Poincaré sea válida, no solo es necesario considerar la transformación de Lorentz en el r'egimen de velocidades bajas (comparadas con la velocidad de la luz), sino que también se deben contemplar intervalos tipo tiempo grandes. Bajo las mismas condiciones, las propiedades de transformación de grandes intervalos tipo espacio son descritos por un grupo que representa un nuevo límite no relativista del grupo Poincaré. Este grupo, aunque distinto del grupo de Galileo, también se obtiene a partir del grupo de Poincaré mediante una contracción. L.M. Lévy-Leblond estudio en profundidad la estructura de este grupo y su álgebra de Lie.
La conexión entre el grupo de Poincaré y el grupo de Galileo fue clarificada gracias a la noción de çontracción"de grupos, introducida por Inönü y Wigner. Levy-Leblond mostró que, además del grupo de Galileo, existe otro límite no relativista del grupo de Poincaré. Para entender esto, es necesario primero analizar las condiciones de validez de la aproximación galileana. Empecemos por considerar las transformaciones de Lorentz

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{3.1}$$
$$y' = y \tag{3.2}$$
$$z' = z \tag{3.3}$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{3.4}$$

cuyo límite no-relativista, $v \ll c$, conduce a las ecuaciones de transformación de Galileo

$$x' = x - vt \tag{3.5}$$
$$y' = y \tag{3.6}$$
$$z' = z \tag{3.7}$$
$$t' = t \tag{3.8}$$

Consideremos, por simplicidad, las condiciones de validez de la aproximación galileana en un espacio de Minkowski de dos dimensiones, una dimensión espacial y otra temporal, lo que permite un intervalo $(\Delta x, \Delta t)$ entre dos eventos. Bajo una transformación de Lorentz pura, definida por una velocidad v, este intervalo se transforma en el intervalo $(\Delta x', \Delta t')$, dado por

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.9}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.10}$$

luego, bajo la transformación galileana, con $v \ll c$, se tiene que

$$\Delta x' = \Delta x - v\Delta t \tag{3.11}$$

$$\Delta t' = \Delta t \tag{3.12}$$

Se puede observar con relativa facilidad que no basta con imponer que la velocidad sea mucho menor que la velocidad de la luz, es decir, $v \ll c$, para garantizar la validez de la aproximación galileana. En efecto, a partir de la segunda ecuación, se concluye que, además de la condición $v \ll c$ también es necesario exigir que

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \ll c \longrightarrow \Delta x \ll x\Delta t \tag{3.13}$$

y que $v\Delta x/c^2$ sea despreciable en comparación con Δt, sin que $c\Delta t$ sea despreciable respecto a Δx. Las condiciones $v \ll c$ y $\Delta x/\Delta t \ll c$ conducen a la transformación de Galileo. En efecto,

I. $v \ll c$, entonces $1 - v^2/c^2 \approx 1$

II. si $\Delta x/\Delta t \ll c$, es decir $\Delta x \ll c\Delta t$, entonces $\Delta x/c \ll \Delta t$, esto significa

$$\frac{v}{c^2}\Delta x = \left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{\Delta x}{c}\right) \lll \Delta t, \tag{3.14}$$

por lo cual

$$\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x \approx \Delta t \tag{3.15}$$

lo que significa que $\Delta t' = \Delta t$.

III. si $\Delta x \ll c\Delta t$ y $v \ll c$, tenemos que $\Delta x \sim v\Delta t$, por lo cual $\Delta x' = \Delta x - v\Delta t$.

Esto implica que la condición adicional $\Delta x/\Delta t \ll c$, junto con la condición usual $v \ll c$, lleva a que la transformación de Lorentz se reduzca a la transformación de Galileo $\Delta x' = \Delta x - v\Delta t$ y $\Delta t' = \Delta t$.
Es fácil comprobar que esta aproximación es también consistente en el sentido que

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \ll c \quad \text{y} \quad v \ll c \longrightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \ll c \tag{3.16}$$

En efecto,

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x} = \frac{\Delta t\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - v\right)}{\Delta t\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - v\right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} \tag{3.17}$$

de aquí es posible ver que

I. Si $\Delta x/\Delta t \ll c$ y $v \ll c$, entonces $\Delta x/\Delta t - v \ll c$,

II. y $(v/c^2)(\Delta x/\Delta t) = (v/c)(\Delta x/\Delta t)/c \lll 1$, por lo cual $1 - (v/c^2)(\Delta x/\Delta t) \sim 1$

Estos resultados muestran que $\Delta x'/\Delta t' \ll c$.

Por otro lado, la condición de Galileo (3.13) requiere que se esté interesado solo en las propiedades de transformación de baja velocidad (baja energía) y la condición $\Delta x/\Delta t \ll c$ exige grandes intervalos tipo tiempo. En efecto, la condición adicional $\Delta x/\Delta t \ll c$, nos dice que si $\Delta x \ll c\Delta t$ se tiene que el intervalo $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ es un intervalo tipo tiempo grande.

Esta condición absolutamente esencial está siempre implícita, sin embargo, hasta el artículo de Levy-Leblond de 1965 esta condición nunca antes fue explicita, pero resulta claro que ella es satisfecha de forma efectiva en todas las aplicaciones comunes de la relatividad galileana, donde los intervalos de tiempo se miden en segundos y los intervalos de espacio se miden en metros.

3.1. Transformación de Carroll

¿Que pasa si además de imponer las condiciones con $v \ll c$, se impone las condiciones de un intervalo entre dos sucesos tipo espacio y muy grande?

$$S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \ll 0 \quad \rightarrow \quad c^2\Delta t^2 \ll \Delta x^2 \quad \rightarrow \quad \Delta x \gg c\Delta t \tag{3.18}$$

recordando que

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.19}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.20}$$

sí $\Delta x \gg c\Delta t$ y $v \ll c$, entonces

$$\Delta x \gg v\Delta t \quad \rightarrow \quad \Delta x' = \Delta x \tag{3.21}$$

pero $\frac{v}{c} \ll 1$, por lo que

$$\frac{v}{c}\frac{\Delta x}{c} \gg \Delta t \tag{3.22}$$

esto conduce a que las transformaciones de Lorentz tomen la forma

$$\Delta x' = \Delta x \tag{3.23}$$

$$\Delta t' = \Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x \tag{3.24}$$

las cuales son llamadas transformaciones de Carroll de Levi-Leblond, en donde $\Delta t \ll c^{-1}\Delta x$, es decir $c \to 0$, y el intervalo tipo espacio entre dos sucesos es grande.
Por otro lado tenemos que si $\Delta t \gg c^{-1}\Delta x$, es decir si $c \to \infty$, $(v \ll c)$, lo que significa que el intervalo tipo tiempo entre dos sucesos es grande, entonces obtenemos la aproximación galileana

$$\Delta x' = \Delta x - vt \tag{3.25}$$

$$\Delta t' = \Delta t \tag{3.26}$$

en otras palabras, si $\Delta x \ll c\Delta t$, tenemos que Δx no será mucho menos que $(v/c)(c\Delta t)$, es decir que Δx no es despreciable frente a $v\Delta t$, por lo que $\Delta x' = \Delta x - v\Delta t$. Por otro lado, si $\Delta t \gg c^{-1}\Delta x$ tenemos que $\Delta t \ggg (v/c)(c^{-1}\Delta x)$, es decir $(v/c)(c^{-1}\Delta x)$ es despreciable frente a Δt, por lo que $\Delta t' = \Delta t$.

- Según Lévy-Leblond, las transformaciones de intervalos tipo espacio grandes están descritas por un grupo que representa un nuevo límite no relativista del grupo de Poincaré. Este grupo, aunque diferente del de Galileo, también se obtiene mediante una contracción del grupo de Poincaré. En un universo regido por este grupo, la causalidad no sería efectiva en la práctica.

- Según las transformaciones de Lorentz, la velocidad relativa v entre dos sistemas de referencia no puede exceder c, la velocidad de la luz en el vacío, que es la máxima en la naturaleza. Esto implica que no es posible la transmisión instantánea de información.

- En las trasnformaciones galileanas, el tiempo absoluto permanece invariante, mientras que en las transformaciones de Lorentz, espacio y tiempo se combinan, reflejando su simetría. Como señaló Minkowski, espacio y tiempo, por separado, se desvanecen en sombras, y solo su unión conserva una realidad independiente.

3.2. Simetrías de Boosts

En general, una simetría de boost es una simetría donde el tiempo y el espacio pueden transformarse entre sí. Usualmente puede ser considerada como una transformación de coordenadas que describe un cambio en la velocidad del observador.
A menudo se exige que el sistema de ecuaciones que describe un sistema físico permanezca igual bajo un boost. Uno podría querer considerar diferentes simetrías de boost dependiendo

del sistema que se quiera describir. Algunos boost que son familiares, son el boost de Lorentz

$$\vec{x}' = \gamma(\vec{x} - \vec{\beta}ct) \tag{3.27}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{c}\right) \tag{3.28}$$

y el boost de Galileo

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \tag{3.29}$$

$$t' = t \tag{3.30}$$

donde $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ y $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

- Los boosts de Lorentz son una simetría esencial en las teorías relativistas, cuyo grupo de simetría completo es el grupo de Poincaré $ISO(1,3)$. Este grupo, fundamental en cualquier teoría relativista, comprende las transformaciones que preservan la métrica de Minkowski. Está compuesto por tres elementos: rotaciones, boosts de Lorentz y traslaciones, siendo las simetrías de rotación y traslación comunes a muchas teorías físicas.
- El boost de Galileo se deriva del boost de Lorentz al tomar el límite $c \to \infty$, lo que supone que las velocidades involucradas son mucho menores que la velocidad de la luz. Este límite conduce a una teoría clásica, donde el cambio en el boost altera significativamente el comportamiento del sistema.
- El boost de Lorentz es clave para describir fenómenos relativistas como la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud. Al reemplazarlo por el boost galileano, se altera por completo el comportamiento del sistema.

3.3. Cotracción de Inönü-Winger

El boost de Galileo se obtiene del boost de Lorentz al tomar el límite $c \to \infty$. Este cambio de simetrías puede interpretarse como un límite aplicado al álgebra de Lie del grupo de simetría. Este proceso se conoce como contracción de Inönü-Wigner.

Observando el álgebra de Poincaré, vemos que $ISO(1,3)$ esta compuesta de

I. $ISO(1)$, generada por traslaciones temporales (H).

II. $ISO(3)$, generada por traslaciones espaciales y rotaciones espaciales (J_i, P_i).

Estas dos álgebras están ligadas por el generador de Boost B_i

$$B_i = it\partial_i - \frac{i}{c^2}x_i\partial_t = tP_i - \frac{1}{c^2}x_iH \tag{3.31}$$

Podemos reescalar una de estas álgebras con respecto a la otra haciendo uso de un parámetro adimensional λ.

I. Si se reescala el generador P_i y B_i

$$P_i \to \lambda P_i \qquad B_i \to \lambda B_i \tag{3.32}$$

y luego tomamos el límite cuando $\lambda \to \infty$, obtenemos el álgebra de Galileo.

II. Si se reescala H y B_i

$$H \to \lambda H \qquad B_i \to \lambda B_i \tag{3.33}$$

luego el conmutador nos da

$$[\lambda B_i, \lambda H] = -iP_i \quad \to \quad [B_i, H] = -\frac{i}{\lambda^2} P_i \tag{3.34}$$

en el límite cuando $\lambda \to \infty$

$$[B_i, H] = 0 \tag{3.35}$$

si reescalamos ahora el generador B_i

$$\lambda B_i = tP_i - \frac{1}{c^2} x_i \lambda H \quad \to \quad B_i = \frac{t}{\lambda} P_i - \frac{1}{c^2} x_i H \tag{3.36}$$

si tomamos el límite cuando $\lambda \to \infty$, se encuentra que

$$B_i = -\frac{1}{c^2} x_i H \equiv C_i \tag{3.37}$$

donde C_i es conocido como el boost de Carrol, y el álgebra de Poincaré se contrae a la llamada álgebra de Carroll, por lo que, luego del reescalamiento tenemos que los conmutadores nos quedan

$$[C_i, H] = 0 \tag{3.38}$$
$$[C_i, C_j] = 0 \tag{3.39}$$
$$[J_i, C_j] = i\epsilon_{ijk} C_k \tag{3.40}$$
$$[P_i, C_j] = \frac{i}{c^2} \delta_{ij} H \tag{3.41}$$
$$[B_i, B_j] = -\frac{i}{\lambda^2 c^2} \epsilon_{ijk} J_k \tag{3.42}$$

mientrás que el álgebra de Carroll se describe por

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k && (3.43)\\
[J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k && (3.44)\\
[J_i, C_j] &= i\epsilon_{ijk}C_k && (3.45)\\
[P_i, C_j] &= \frac{i}{c^2}\delta_{ij}H && (3.46)\\
[C_i, H] &= 0 && (3.47)\\
[J_i, H] &= 0 && (3.48)\\
[P_i, H] &= 0 && (3.49)\\
[P_i, P_j] &= 0 && (3.50)\\
[C_i, C_j] &= 0 && (3.51)
\end{aligned}$$

El resultado de la contracción muestra que un boost en el límite de Carrol satisface $[C_i, H] = 0$, mientras que $[C_i, P_i] = -\frac{i}{c^2}\delta_{ij}H$. Por lo tanto, un boost de Carrol puede convertir una traslación espacial en una traslación temporal, pero no al revés. El límite de Carrol puede considerarse como el opuesto del límite de Galileo y, por lo tanto, a menudo se considera como límite de $c \to 0$.

4. Grupo de De-Sitter

El espacio-tiempo de De-Sitter $dS(4,1)$ puede ser representado como el espacio homogéneo

$$dS(4,1) = \frac{SO(4,1)}{SO(3,1)} \tag{4.1}$$

es decir, el cuociente entre el grupo de De-Sitter $SO(4,1)$ y el grupo de Lorentz $SO(3,1)$. Topológicamente, el espacio-tiempo de De-Sitter $dS(4,1)$ puede ser visto como $\mathbb{R}^1 \times S^3$, con $\mathbb{R}^1$ representando la dirección temporal.

Definición: El espacio dS es definido como una hipersuperficie inmersa en un espacio de Minkowski de 5 dimensiones $\mathbb{R}^{1+4}$ ($\sim \mathbb{R}^5$), es decir

$$dS(4,1) \equiv \{x : (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^5 \quad / \quad s^2 = \eta_{AB}x^A x^B = -l^2\} \tag{4.2}$$

en donde

$$\eta_{AB} = diag(+1, -1, -1, -1) \quad , \quad A, B = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{4.3}$$

Definición: El grupo de De-Sitter es el conjunto de transformación de coordenadas que deja invariante la forma cuadrática

$$s^2 = \eta_{AB}x^A x^B = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu - (x^4)^2, \quad A = (\mu, 4) \tag{4.4}$$

con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ y donde l es el radio de De-Sitter. Este grupo es generado por los generadores J_{AB}, representados por medio de operadores diferenciales de la forma

$$J_{AB} = (x_A \partial_B - x_B \partial_A) = \eta_{AC} x^C P_B - \eta_{BC} x^C P_A \tag{4.5}$$

en donde

$$P_A = \partial_A = \frac{\partial}{\partial x^A}\,, \qquad A : (\mu, 4) \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{4.6}$$

El grupo de Sitter satisface la siguiente relación de conmutación

$$[J_{AB}, J_{CD}] = -\left(\eta_{AC} J_{BD} - \eta_{AD} J_{BC} - \eta_{BC} J_{AD} + \eta_{BD} J_{AC}\right) \tag{4.7}$$

de donde podemos deducir el álgebra de Lie asociada al grupo de De-Sitter

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= -(\eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}) && (4.8)\\
[J_{\mu\nu}, J_{4\sigma}] &= -(\eta_{\mu\sigma} J_{4\nu} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu 4}) && (4.9)\\
[J_{4\nu}, J_{4\sigma}] &= J_{\nu\sigma} && (4.10)
\end{aligned}$$

Es posible visualizar la transitividad del espacio de De-Sitter usando coordenadas estereográficas (χ^μ, χ^4), en lugar de (x^μ, x^4). Estas coordenadas son definidas por medio de la proyección estereográfica desde la hipersuperficie en el espacio-tiempo de Minkowski

$$\begin{aligned}
x^\mu &= \Omega(\sigma^2)\chi^\mu && (4.11)\\
x^4 &= -l\Omega(\sigma^2)\left(1 + \frac{\sigma^2}{4l^2}\right) && (4.12)
\end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu && (4.13)\\
\Omega &= \frac{1}{1 - \frac{\sigma^2}{4l^2}} && (4.14)
\end{aligned}$$

mientras que la transformación inversa esta dada por

$$\chi^\mu = \Omega(\chi^4) x^\mu \tag{4.15}$$

con

$$\Omega(\chi^4) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^4}{l}\right) \tag{4.16}$$

En coordenadas conformes, el elemento de línea de De-Sitter viene dado por

$$ds^2 = \Omega^2 \eta_{AB} d\chi^A d\chi^B \tag{4.17}$$

es decir que el elemento de línea toma una forma conforme, por lo que revela que el espacio de De-Sitter es conformalmente plano. Este resultado concuerda con los resultados de la geometría diferencial, donde es conocido que:

I. Los espacios homogéneos e isótropos son maximalmente simétricos, es decir, exhiben el número máximo de simetrías de Killing.

II. Los espacios maximalmente simétricos son caracterizados por una curvatura constante.

III. Los espacios de curvatura constante son conformalmente planos.

El uso de coordenadas conformes, como las estereográficas, es valioso porque los generadores de simetrías en estas coordenadas se asemejan a los del grupo de Poincaré en coordenadas cartesianas, facilitando el proceso de contracción. A diferencia del espacio de Minkowski, el espacio de De-Sitter no tiene un sistema de coordenadas preferido, por lo que en la literatura también se encuentran otras opciones, como las coordenadas de Beltrami, además de las naturales $\{x^A\}$ y las conformes $\{\chi^A\}$. La elección de coordenadas influye en cómo se representan los generadores del álgebra de De-Sitter en los campos.

4.1. Estructura del subálgebra del grupo de De-Sitter

La estructura del subálgebra del grupo de De-Sitter puede ser vista reescribiendo el álgebra canónica para el grupo de 10-parámetros $SO(4,1)$, en la forma:

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} && (4.18) \\ [J_{4\mu}, J_{\rho\sigma}] &= \eta_{\mu\nu}J_{4\rho} - \eta_{\mu\rho}J_{4\nu} && (4.19) \\ [J_{4\mu}, J_{4\nu}] &= -\varepsilon J_{\mu\nu} && (4.20) \end{aligned}$$

en donde $\varepsilon = +1$ corresponde al espacio anti-de-Sitter, denotado por $dS(3,2)$.
En coordenadas cartesianas x^A, los generadores de las transformaciones infinitesimales son

$$J_{AB} = \eta_{AC}x^C P_B - \eta_{BC}x^C P_A \tag{4.21}$$

en términos de las coordenadas estereográficas $\{\chi^A\}$, tenemos que J_{AB} puede ser escrito

$$J_{\mu\nu} \equiv L_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\chi^\rho P_\nu - \eta_{\nu\rho}\chi^\rho P_\mu \ , \qquad P_\mu = \frac{\partial}{\partial\chi^\mu} \tag{4.22}$$

así tenemos que

$$J_{4\mu} = lP_\mu - \frac{1}{4l}K_\mu \tag{4.23}$$

donde K_μ es el generador de transformaciones conformes especiales

$$K_\mu = (2\eta_{\mu\rho}\chi^\rho\chi^\sigma - \sigma^2\delta^\sigma_\mu)P_\sigma \tag{4.24}$$

Es conveniente definir el momentum Π_μ como

$$\Pi_\mu = \frac{1}{l}J_{4\mu} = -\left(P_\mu - \frac{1}{4l^2}K_\mu\right) \tag{4.25}$$

que se puede generalizar a

$$\Pi_\mu = \varepsilon \left(P_\mu - \frac{1}{4l^2} K_\mu \right) \tag{4.26}$$

donde $\varepsilon = -1$ para $SO(4,1)$ y $\varepsilon = 1$ para $SO(3,2)$.

Esto significa que en coordenadas conformes, es decir, en coordenadas estereográficas, podemos ver que

- Las traslaciones en el espacio de De-Sitter estan compuestas de las traslaciones ordinarias P_μ y una transformación conforme especial K_μ.
- El espacio de De-Sitter, al igual que el espacio de Minkowski, es un espacio homogéneo e isótropo, sin embargo sus propiedades de homogeneidad difieren sustancialmente:
  i. el espacio de Minkowski es transitivo bajo traslaciones espacio-temporales
  ii. el espacio de De-Sitter es transitivo bajo una combinación de traslaciones espacio-temporales y transformaciones conformes especiales.

Luego, podemos escribir el álgebra del grupo de De-Sitter en estas coordenadas

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = -(\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \tag{4.27}$$
$$[L_{\mu\nu}, \Pi_\rho] = -(\eta_{\mu\rho}\Pi_\nu - \eta_{\nu\rho}\Pi_\mu) \tag{4.28}$$
$$[\Pi_\mu, \Pi_\nu] = -\frac{\varepsilon}{l^2} L_{\mu\nu} \tag{4.29}$$

del último conmutador podemos ver que los generadores de las "traslaciones"de De-Sitter no son realmente traslaciones, sino que rotaciones. Por otro lado, los generadores P_μ y K_μ son los generadores de traslaciones y de las transformaciones conformes especiales, también llamadas propias. Los generadores $L_{\mu\nu}$ son los generadores del subgrupo de Lorentz, mientras que los generadores $J_{\mu 4}$ definen la transitividad sobre el espacio homogéneo.

4.1.1. Transitividad

La transitividad está estrechamente vinculada a las nociones de distancia espacial e intervalo temporal. En el espacio-tiempo de Minkowski, cualquier par de puntos puede conectarse mediante una traslación espacio-temporal, lo que hace que estas nociones sean esencialmente traslacionales. Por lo que podemos decir que la transitividad es la propuedad que especifica como uno se mueve desde un punto a otro en un espacio-tiempo dado.

- Esta propiedad está intimamente relacionada con la noción de movimiento.
- Por ejemplo, cualquier par de puntos en el espacio-tiempo de Minkowski estan conectados por una traslación espacio-temporal.

- Como consecuencia de esto, el movimiento en esta espacio-tiempo es descrito por trayectorias cuyos puntos estan conectados unos con otros por traslaciones ordinarias.
- En el espacio-tiempo de De-Sitter, cualquier par de puntos estan conectados unos con otros por una combinación de traslaciones espacio-temporales ordinarias y transformaciones conformes especiales.
- Esta combinación de traslaciones es conocida como "traslaciones de De-Sitter".

4.2. Contracción del grupo de De-Sitter

La relación entre el radio de De-Sitter l y la constante cosmológica Λ en 4 dimensiones, es

$$\Lambda = \frac{3}{l^2} \tag{4.30}$$

por lo que tenemos dos casos a analizar:

I. Si la constante cosmológica es nula, es decir $\Lambda = 0 \Rightarrow l \to \infty$, luego tenemos que

$$\lim_{l\to\infty} L_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \qquad \lim_{l\to\infty} \Pi_\mu = P_\mu \tag{4.31}$$

luego, el álgebra de De-Sitter toma la forma

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} \tag{4.32}$$

$$[L_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu \tag{4.33}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{4.34}$$

Esto significa que el álgebra de De-Sitter se contrae a la usual álgebra de Poincaré. Para $l \to \infty$, los generadores Π_μ se reducen a las traslaciones ordinarias y el grupo de De-Sitter se contrae al grupo de Poincaré $\mathcal{P} = \mathcal{L} \oslash \mathcal{T}$. Junto con las modificaciones del álgebra y el grupo, el espacio de De-Sitter se transforma en el espacio de Minkowski $\mathcal{M} = \mathcal{P}/\mathcal{L}$, el cual es transitivo bajo traslaciones ordinarias.

II. Si la constante cosmológica es infinita, es decir $\Lambda \to \infty \Rightarrow l \to 0$. En este caso es conveniente usar las coordenadas

$$\overline{x}^A = \frac{x^A}{4l^2} \tag{4.35}$$

donde x^A esta relacionado con las coordenadas estereográficas como

$$\overline{x}^\mu = \overline{\Omega}\chi^\mu \qquad \overline{\Omega} = \frac{\Omega}{4l^2} \tag{4.36}$$

en estas coordenadas los generadores $L_{\mu\nu}$ y $J_{4\mu}$ no cambian su forma, pero si cambia Π^{μ}, al cual llamaremos $\overline{\Pi}^{\mu}$

$$\overline{\Pi}_{\mu} = 4lJ_{4\mu} = 4l^2 P_{\mu} - K_{\mu} \tag{4.37}$$

estos generadores satisfacen que

$$\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= \eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} && (4.38)\\
[L_{\mu\nu}, \overline{\Pi}_{\rho}] &= \eta_{\nu\rho}\overline{\Pi}_{\mu} - \eta_{\mu\rho}\overline{\Pi}_{\nu} && (4.39)\\
[\overline{\Pi}_{\mu}, \overline{\Pi}_{\nu}] &= 16l^2 L_{\mu\nu} && (4.40)
\end{aligned}$$

en el límite $l \to 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to 0} L_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu} && (4.41)\\
\lim_{l\to 0} \overline{\Pi}_{\mu} &= -K_{\mu} && (4.42)
\end{aligned}$$

por lo que el álgebra se contrae a la siguiente

$$\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= -(\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) && (4.43)\\
[L_{\mu\nu}, K_{\rho}] &= -(\eta_{\mu\rho}K_{\nu} - \eta_{\nu\rho}K_{\mu}) && (4.44)\\
[K_{\mu}, K_{\nu}] &= 0 && (4.45)
\end{aligned}$$

esta álgebra es isomorfa al álgebra de Poincaré $\mathcal{P}$. Sin embargo, el grupo asociado a ella, conocido como grupo de Poincaré-2 o grupo de Poincaré conforme, es completamente distinto a $\mathcal{P}$.

Del mismo modo que se define el espacio de Minkowski $\mathcal{M}$ como el espacio coseto entre $\mathcal{P}$ y Lorentz $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{L}} = \frac{ISO(1,3)}{SO(3)} \tag{4.46}$$

se define el espacio cónico asociado a $\mathcal{Q}$ como

$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{L}} \tag{4.47}$$

dado que

$$\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} - (x^4)^2 = -l^2 \tag{4.48}$$

entonces en el límite $l \to 0$ tenemos

$$\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} - (x^4)^2 = 0 \tag{4.49}$$

esto implica que

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 = 0 \tag{4.50}$$

obteniéndose

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = (x^0)^2 \tag{4.51}$$

Por otro lado, sabemos que la métrica del espacio de De-Sitter tiene la forma

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad g^{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x)\eta^{\mu\nu} \tag{4.52}$$

donde

$$\Omega^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon\frac{\sigma^2}{l^2}} \tag{4.53}$$

en el límite $l \to 0$ la métrica de De-Sitter se vuelve singular en todas partes del espacio $\mathcal{N}$

$$\lim_{l\to 0} g_{\mu\nu} \to 0, \qquad \lim_{l\to 0} g^{\mu\nu} \to \infty \tag{4.54}$$

Como consecuencia de esto, no es posible definir ningún intervalo invariante ordinario en el espacio $\mathcal{N}$, lo que significa que no se cumples las nociones usuales de distancia espacial e intervalo temporal.
Sin embargo, la correspondiente conexión de Levi-Civita, dada por

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left(\delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\mu} - \eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\sigma}\right)\partial_{\sigma}[\ln\Omega(x)] \tag{4.55}$$

esta bien definida y, como consecuencia de esto, el tensor de curvatura de Riemann también está bien definido. Un cálculo explícito muestra que, mientras que tanto el tensor de curvatura de Riemann como el tensor de Ricci se anulan para $l \to 0$, se tiene que el escalar de curvatura es infinito

$$\lim_{l\to 0} R = \infty \tag{4.56}$$

La anulación de los tensores de Riemann y de Ricci con una curvatura escalar infinita es una propiedad característica de un espacio-tiempo con un término cosmológico infinito.

5. Posible aplicación

I. Una posible aplicación de los resultados anteriores a la cosmología del universo temprano.

II. Según el modelo estándar del big bang, el universo comenzó desde un punto singular. Dado que relatividad general se quiebra en cualquier singularidad, la condición inicial del universo no puede ser caracterizada como una solución particular de la teoría que gobierna la dinámica del universo. En consecuencia, se deja a la libre elección y a menudo se considera que está más allá del alcance de las teorías físicas conocidas.

III. Las observaciones de la aceleración del universo indican la presencia de un término cosmológico Λ no nulo en nuestro universo.

IV. La inflación requiere un valor muy alto para las primeras etapas del universo. Por lo tanto:

- Es de interes postular un Λ primordial infinito en algún tiempo cosmológico inicial, seguido de un término cosmológico finito grande, que impulsaría la inflación.
- Esto significa postular que la condición inicial del universo es un espacio-tiempo definido por la solución de De-Sitter en el límite de una Λ infinita.
- De esta manera, el estado inicial del universo quedaría vinculado al límite de una solución específica de la ecuación de Einstein y, en consecuencia, se establecería de manera consistente como parte de la teoría.
- Como consecuencia de esto, toda la energía del universo estaría inicialmente en forma de energía oscura.
- Es importante notar que este espacio-tiempo también presenta las propiedades básicas para ser considerado como un estado inicial del universo en que toda la energía es oscura.

A partir de las consideraciones anteriores, el nacimiento de los usuales conceptos de espacio y tiempo puede relacionarse con la transición desde un término cosmológico infinito a uno finito.

Referencias

[1] E. Inönü, E.P. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci. 39, 510 (1953)

[2] E. Inönü. In: Gürsey, F. (ed) Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics, Istanbul Summer School of Theoretical Physics. Gordon and Breach, New York (1962)

[3] J.M. Lévy-Leblond, Ann. Inst. Henri Poincaré (A) Phys. Théor. 3, 1-12 (1965).

[4] H. Bacry, J.M.Lévy-Leblond. J. Math. Phys. 9, 1605 (1968)

[5] R. Aldrovandi, A.L. Barbosa, L.C.B Crispino, J.G. Pereira, Class. Quantum Gravity 16, 495 (1999)

[6] R. Aldrovandi, J.P Beltrán Almeida, C.S.O. Mayor, J.G. Pereira, Lorentz transformations in de Sitter relativity. gr-qc/0709.3947

[7] S. Cacciatori, V. Gorini and A. Kamenshchik, Ann. Phys. 17 (2008) 728

[8] R. Aldrovandi, J.G. Pereira, A second Poincaré group [gr-qc/980961].

[9] R. Aldrovandi, J.P. Beltrán-Almeida, andJ. G. Pereira, Int. J. Mod. Phys. D 13, 2241 (2004).