

Simetrías y Partículas
Charla en la Escuela del Doctorado en Ciencias Físicas
UBB Concepción

Markos Maniatis
Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío
maniatis8@gmail.com

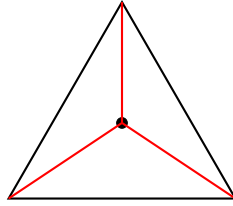
23-25 de Octubre 2024

Contents

1 Geometría	2
1.1 Triángulo equilátero	2
1.2 Cuadrado	2
1.3 Grupo de rotaciones en dos dimensiones $SO(2)$	3
2 Simetrías en leyes de la física	4
2.1 Conservación de la energía	4
2.2 Velocidad de la luz	5
3 Generadores y el grupo $SO(3)$	5
4 La simetría de Poincaré	6
4.1 Boosts	6
5 Cuantización del Momento angular	8
5.1 Momento angular en la mecánica cuántica	8
6 Clasificación de Wigner	9
7 Partículas elementales	10
8 Interacciones	11
8.1 Cálculo de Mecánica Cuántica de Campo	11
8.2 Amplitudes	11
9 Espinores de Weyl	12
9.1 Partículas con espín mayor	12
10 Amplitudes	13
10.1 Helicidad de partícula con espín $1/2$	13
10.2 Helicidad	13
10.3 Interacción entre 3 partículas	13
10.4 Unitariedad	14
11 Conclusión	14

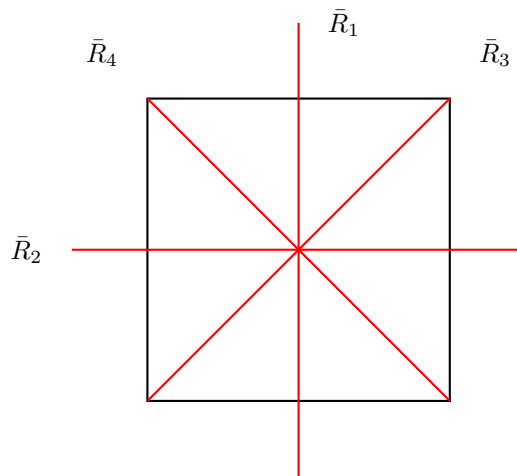
1 Geometría

1.1 Triangulo equilatero



Simétrico bajo rotaciones sobre el centro con ángulos 120° , 240° , 360° , ... (Ángulos discretos)

1.2 Cuadrado



Simetrias: Rotaciones con 90° , 180° , 270° , 360° , 450° , ... Reflexiones
Podemos representar las simetrias con matrices

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

Lo podemos entender considerando rotaciones en dos dimensiones:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Tambien simitrias de reflexiones

$$\bar{R}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Grupo diédrico (dihedral) con 4 lados D_8 (o D_4) con 8 elementos,

$$D_8 = \{R_0, R_1, R_2, R_3, \bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_4\}. \quad (4)$$

Conjunto D_8

1. El conjunto es *cerrado*

La aplicación de dos elementos corresponde a otro elemento, Tabla de Caley:

\circ	R_0	R_1	R_2	R_3	\bar{R}_1	\bar{R}_2	\bar{R}_3	\bar{R}_4
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	\bar{R}_1	\bar{R}_2	\bar{R}_3	\bar{R}_4
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0	\bar{R}_4	\bar{R}_3	\bar{R}_1	\bar{R}_2
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1	\bar{R}_2	\bar{R}_1	\bar{R}_4	\bar{R}_3
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2	\bar{R}_3	\bar{R}_4	\bar{R}_2	\bar{R}_1
\bar{R}_1	\bar{R}_1	\bar{R}_4	\bar{R}_2	\bar{R}_3	R_0	R_1	R_2	R_3
\bar{R}_2	\bar{R}_2	\bar{R}_3	\bar{R}_1	\bar{R}_4	R_3	R_0	R_1	R_2
\bar{R}_3	\bar{R}_3	\bar{R}_2	\bar{R}_4	\bar{R}_1	R_2	R_3	R_0	R_1
\bar{R}_4	\bar{R}_4	\bar{R}_1	\bar{R}_3	\bar{R}_2	R_1	R_2	R_3	R_0

2. Asociativo

Con la representación de los elementos como matrices vemos que tenemos asociatividad

$$D_i \circ (D_j \circ D_k) = (D_i \circ D_j) \circ D_k . \quad (5)$$

3. Elemento de Identidad

Hay un elemento de identidad

$$I \circ D_i = D_i \circ I = D_i \quad (6)$$

4. Inverso

De cada elemento hay un inverso,

$$D_i \circ D_i^{-1} = I \quad (7)$$

$$R_0^{-1} = R_0, \quad R_1^{-1} = R_3, \quad R_2^{-1} = R_2, \quad \bar{R}_1^{-1} = \bar{R}_1, \quad \bar{R}_2^{-1} = \bar{R}_2, \quad \bar{R}_3^{-1} = \bar{R}_3, \quad \bar{R}_4^{-1} = \bar{R}_4 \quad (8)$$

Un conjunto con una composición \circ con las propiedades 1)-4) se llama *grupo*.

1.3 Grupo de rotaciones en dos dimensiones SO(2).

Podemos representar rotaciones en dos dimensiones con matrices:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Un vector se transforma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \rightarrow R\mathbf{x}. \quad (10)$$

Podemos ver que las rotaciones forman un grupo continuo. Notan, $R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha+\beta)$, (cerrado), matrices, es decir asociativo, elemento de identidad, $R(0) = I$, inverso $R(-\alpha)$ con $R(-\alpha)R(\alpha) = R(0) = I$.

Este grupo es *orthogonal*:

$$R^T R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Determinante,

$$\det R = +1 \quad (12)$$

Por es, el grupo se llama orthogonal (O) y especial (S) en dos dimensiones, SO(2).

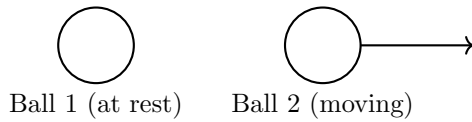
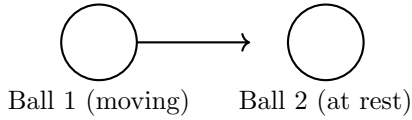
Mas adelante necesitamos recordar que el grupo SO(2) tiene un parámetro α .

2 Simetrías en leyes de la física

2.1 Conservación de la energía

Como ejemplo consideramos una ley, la ley de la conservación de la energía en un choque de dos pelotas. Recuerdan que la energía cinética es (clásica)

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13)$$



En este sistema con la segunda pelota al reposo encontramos, antes de la colisión:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_2 = 0. \quad (14)$$

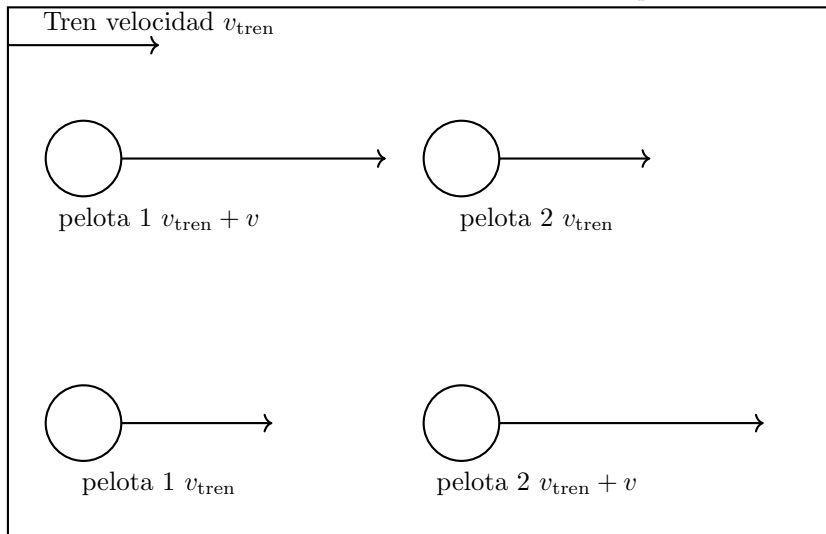
Después:

$$E'_1 = 0, \quad E'_2 = \frac{1}{2}mv^2. \quad (15)$$

En particular:

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \quad (16)$$

Ahora, vemos esta colisión sucediendo en un tren, del punto de vista del andén:



Observación del andén:

Antes de la colisión:

$$E_1 = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_{\text{tren}} + v)^2, \quad E_2 = \frac{1}{2}mv_{\text{tren}}^2, \quad (17)$$

y después de la colisión:

$$E'_1 = \frac{1}{2}mv_{\text{tren}}^2, \quad E'_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_{\text{tren}} + v)^2, \quad (18)$$

La ley esta *invariante* bajo este *boost*

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 . \quad (19)$$

Si las energías de las pelotas dependen del sistema de referencia. La conservación de la energía *NO*.

2.2 Velocidad de la luz

De la *relatividad especial* podemos ver el ejemplo de un rayo de la luz. Independiente de nuestra velocidad (sistemas no acelerados pero con boosts) observamos una partícula de la luz (fotón) con

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (20)$$

—————→

3 Generadores y el grupo SO(3)

Consideramos rotaciones en tres dimensiones,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\mathbf{x} . \quad (21)$$

Grupo orthogonal

$$R^T R = \mathbb{1} \quad (22)$$

Mantiene el radio al cuadrado r^2 constante

$$r^2 = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2 . \quad (23)$$

y

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = r^2 \quad (24)$$

Representación con matrices y rotaciones alrededor de ejes x, y, z :

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Parecido, $R_x(\beta)$, y $R_y(\gamma)$.

Definimos los *generadores*

$$J_z \equiv -i \left. \frac{\partial R_z(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Rotación infinitesimal: $R_z(\delta\alpha) = \mathbb{1} + iJ_z \cdot \delta\alpha$. Muy parecido encontramos los generadores J_x, J_y .

Encontramos la *algebra*

$$[J_x, J_y] \equiv J_x J_y - J_y J_x = iJ_z, \quad \text{y ciclico.} \quad (27)$$

Hemos definido el *conmutador*,

$$[A, B] \equiv AB - BA . \quad (28)$$

Comentario: con el generador podemos construir una rotacion finita:

$$R_z = e^{iJ_z \alpha} = 1 + iJ_z \alpha - J_z^2 \frac{\alpha^2}{2} - iJ_z^3 \frac{\alpha^3}{3} + \dots = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

J_x, J_y, J_z son los generadores del *momento angular*.

Podemos construir una *invariante de Casimir* que conmuta con todos los generadores:

$$J^2 \equiv J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 . \quad (30)$$

Verificamos eso en detalle. Una reglas generales del conmutador:

$$[A, B] = -[B, A], \quad [A^2, B] = A[A, B] + [A, B]B, \quad [A+B, C] = AC + BC - CA - CB = [A, C] + [B, C]. \quad (31)$$

$$\begin{aligned} [J_x^2, J_x] &= J_x^3 - J_x^3 = 0, \\ [J_y^2, J_x] &= J_y[J_y, J_x] + [J_y, J_x]J_y = -i(J_y J_z + J_z J_y), \\ [J_z^2, J_x] &= J_z[J_z, J_x] + [J_z, J_x]J_z = i(J_z J_y + J_y J_z), \end{aligned} \quad (32)$$

En total encontramos

$$[J^2, J_x] = 0 \quad \text{parecido } x \rightarrow y \rightarrow z \quad (33)$$

Interpretamos J^2 como el momento angular total al cuadrado.

4 La simetria de Poincaré

Esperamos que las leyes de la física son invariantes bajo

- Rotaciones
- Boosts
- Translaciones

Rotaciones y Boosts se refieren tambien transformaciones de Lorentz. Con translaciones se refiere las transformaciones a de Poincaré.

4.1 Boosts

Relatividad especial. Los transformaciones con un boost en dirección x :

$$t' = \gamma \left(t + \frac{vx}{c^2} \right), \quad x' = \gamma (x + vt) . \quad (34)$$

Vemos que se mezclan tiempo y espacio. Por eso consideramos ahora 4 dimensiones, $\{t, x, y, z\}$. Definimos los factores de beta y gamma

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (35)$$

Encontramos

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1 . \quad (36)$$

Con $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, definimos un ángulo η sobre

$$\gamma = \cosh(\eta), \quad \beta\gamma = \sinh(\eta) , \quad (37)$$

es decir $\tanh(\eta) = \beta$. Recordamos:

$$\cosh(\eta) \equiv \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2}, \quad \sinh(\eta) \equiv \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2}, \quad \tanh(\eta) \equiv \frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta)} . \quad (38)$$

Tambien vemos que

$$\frac{d \sinh(\eta)}{d\eta} = \cosh(\eta), \quad \frac{d \cosh(\eta)}{d\eta} = \sinh(\eta), \quad (39)$$

En lo siguiente usamos mas corto $c \equiv 1$. Con estas preparaciones podemos escribir para los boosts in dirección x :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = B_x \mathbf{x} \quad (40)$$

con

$$B_x = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Con el generador:

$$K_x = -i \left. \frac{\partial B_x}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Parecido encontramos para los boosts in dirección y, z los generadores K_y, K_z con (27) y con eso la algebra de Lorentz:

$$[K_x, K_y] = -iJ_z, \quad [J_x, K_x] = 0, \quad [J_x, K_y] = iK_z, \quad (\text{y ciclico}). \quad (43)$$

Queremos tambien estudiar translaciones de argumentos de funciones $f(x)$ con $x \rightarrow x' = x + a$ en dirección x . Encontramos que

$$f(x) \rightarrow f(x') = f(x + a) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} a + \mathcal{O}(a^2). \quad (44)$$

El operador $T(a)$ de las translaciones entonces se define como

$$T(a)f(x) = f(x + a) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} a. \quad (45)$$

con el generador

$$P_x f(x) = -i \left. \frac{\partial}{\partial a} T(a) f(x) \right|_{a=0} = -i \frac{\partial}{\partial x} f(x) \quad (46)$$

Encontramos el operador del momento

$$P_x = -i \frac{\partial}{\partial x} \quad (47)$$

Parecido el operador de la energía $P_t = -i\partial/\partial t$, y las otras direcciones del momento. Llegamos a la algebra de Poincaré - con (27), (43):

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [K_i, P_0] = iP_i, \quad [K_i, P_i] = iP_0, \quad [J_i, P_j] = iP_k, (\text{ciclico}) \quad (48)$$

Las transformaciones de Lorentz/Poincaré mezclan espacio y tiempo! Se puede ver que una expression como

$$s = \begin{pmatrix} t & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (49)$$

es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Definimos

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x_\mu) = \begin{pmatrix} t \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad (50)$$

y encontramos que $x^\mu x_\mu$ es invariante. Muy parecido definimos

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (51)$$

Tambien es $p^\mu p_\mu$ una invariante de Lorentz.

5 Cuantización del Momento angular

Recordamos como Schrödinger encontro su formula. Consideramos una onda en una dimension

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (52)$$

Tenemos

$$\text{Longitud de onda} \quad \lambda \quad (53)$$

$$\text{frecuencia} \quad f \quad (54)$$

$$\text{número de onda} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (55)$$

$$\text{frecuencia angular} \quad \omega = 2\pi \cdot f \quad (56)$$

Con las formulas de Planck entre energía y momento de una partícula y frecuencia y longitud de la onda:

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k \quad (57)$$

con la constante de Planck reducida $\hbar = h/(2\pi)$. Notan que la constante de Planck tiene la unidad de una *acción*, es decir energía por tiempo. El momento angular tiene esta unidad. Las ondas de partículas son entonces

$$\psi(x, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}. \quad (58)$$

Schrödinger encontró las ecuaciones de eigenvalores para encontrar momento p y energía E de las partículas:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = \frac{i}{\hbar}p\psi, \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{i}{\hbar}E\psi. \quad (59)$$

En particular encontró el operador

$$\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (60)$$

Postuló que las mediciones de una cantidad son entonces los eigenvalores de su operador.

$$\hat{x}|\psi\rangle = x|\psi\rangle, \quad \hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}|\psi\rangle, \quad (61)$$

Vemos que la medición del momento no es compatible con la medición de la posición!

$$[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x \right) = i\hbar \left(1 + x \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial x} \right) = i\hbar \neq 0 \quad (62)$$

No se pueden medir simultaneamente preciso posición y momento (Principio de incertidumbre de Heisenberg).

5.1 Momento angular en la mecanica cuantica

Clasicamente, el momento angular es

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (\text{conservado}). \quad (63)$$

Cuantización:

$$L_x = yp_z - zp_y \rightarrow \hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (\text{y ciclico}) \quad (64)$$

Encontramos la algebra

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \quad (\text{y ciclico}). \quad (65)$$

Definimos el momento total cuadrado parecido con operadores:

$$\bar{L}^2 \equiv \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2. \quad (66)$$

El calculo muestra que

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \quad (\text{y ciclico}) \quad (67)$$

Se pueden medir simultaneamente L^2 y L_z por ejemplo (y despues no los otros componentes). Definimos un estado con eigenvalores de \hat{L}^2 y \hat{L}_z , Un número positivo siempre se puede escribir de forma $l(l+1)$ y escribimos las unidades del momento angular y su cuadrado explicito:

$$\hat{L}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle, \quad \hat{L}_z|l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle. \quad (68)$$

Cuales son los eigenvalores posibles? Truco: operadores de escala,

$$\hat{L}_+ \equiv \hat{L}_x + i\hat{L}_y, \quad \hat{L}_- \equiv \hat{L}_x - i\hat{L}_y, \quad (69)$$

Encontramos en particular

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_+] = \hbar \hat{L}_+, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_-] = \hbar \hat{L}_-, \quad \hat{L}_\pm = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}|l, m \pm 1\rangle. \quad (70)$$

Esperamos que hay un valor m aximo, m_{\max} , el eigen-valor de la componente z , es decir $\hat{L}_+|l, m_{\max}\rangle = 0$, o

$$\hbar \sqrt{(l - m_{\max})(l + m_{\max} + 1)} = 0 \text{ entonces } m_{\max} = l \quad (71)$$

Muy parecido

$$m_{\min} = -l \quad (72)$$

en total encontramos

$$m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}. \quad (73)$$

Encontramos que l es un número integral o medio entegral y m tiene $2l+1$ valores! En ejemplo: $l = 3/2$, $m \in \{-3/2, -1/2, +1/2, 3/2\}$. Las partículas (ver abajo) correspondiente a estos estados son

- bosones, $l = 0, 1, 2, \dots$
- fermiones, $l = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$

6 Clasificación de Wigner

Wigner construyó las invariantes Casimir del grupo de Poincaré

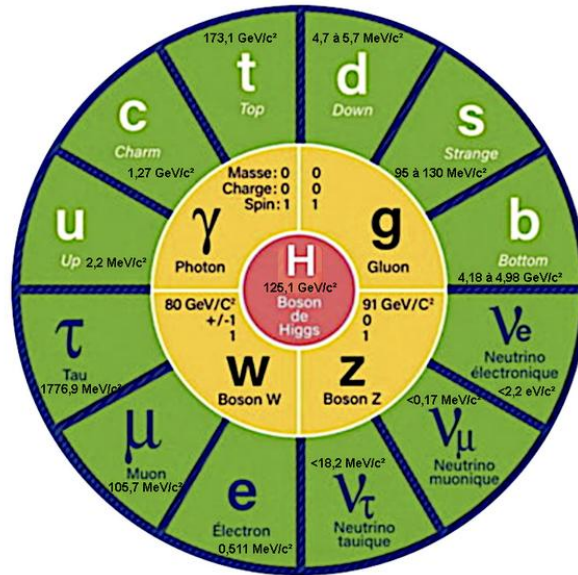
$$\begin{aligned} \hat{P}^2 &= \hat{P}^\mu \hat{P}_\mu = \hat{P}_0^2 - \hat{P}_x^2 - \hat{P}_y^2 - \hat{P}_z^2, \\ \hat{W}^2 &= \hat{W}^\mu \hat{W}_\mu, \quad \text{con } \hat{W}^\mu \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{P}_\nu \hat{J}_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (74)$$

Nota que $\hat{J}_{\rho\sigma} \equiv x_\rho \hat{P}_\sigma - x_\sigma \hat{P}_\rho$ y Pauli-Lubanski vector \hat{W}^μ . Wigner postuló que las propiedades de las partículas elementales son los eigenvalores de las invariantes de Casimir:

- Partículas con masa $m^2 > 0$. En el sistema de las partículas al reposo queda disponible una rotación $SO(3)$. Cuantización con espin $s \equiv l$ con $2s+1$ valores para $s_z = m$.
- Partículas sin masa $m^2 = 0$. No hay sistema de reposo, siempre hay un ray de partícula. Queda disponible solamente una rotación $SO(2)$! Transformaciones transversales no cambian el momento angular. Es decir, hay para cada particular solamente dos *helicidades*, $m \in \{-l, +l\}$. La helicidad es el espin proyectado a la dirección del movimiento.
- Tachyones con masa $m^2 < 0$.

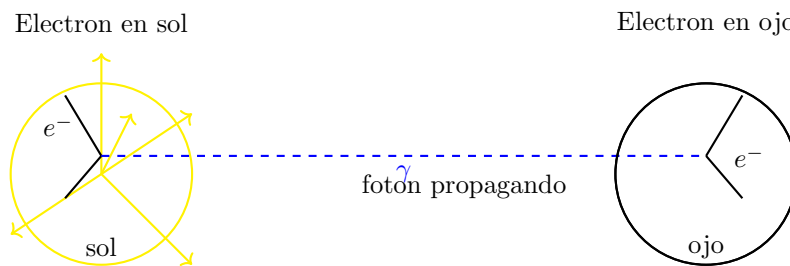
7 Partículas elementales

Hoy conocemos en la naturaleza partículas con espín 0, 1/2, 1, (graveton con espín 2).



8 Interacciones

Observamos interacciones entre las partículas elementales, por ejemplo.

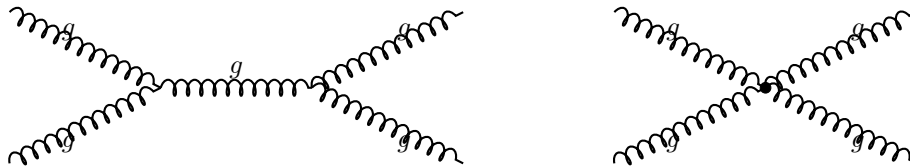


8.1 Calculo de Mecánica Cuántica de Campo

Interaccion entre un electrón con espín 1/2 y un fotón con espín 1. Queremos calcular la probabilidad de la interacción:

$$\langle \text{final} | \text{inicial} \rangle, \quad \text{por ejemplo } \langle e^+ e^- | e^+ e^- \rangle_{\text{Schrödinger}} = \langle e^+ e^- | S | e^+ e^- \rangle_{\text{Heisenberg}}. \quad (75)$$

Convencionalmente es tema de la *Mecánica Cuántica de Campo* incorporando la creación y anihilación de partículas. Calculos son posibles con *diagramas de Feynman* que son una prescripción matemática del calculo en forma de diagramas. Consideramos la interacción entre gluones



Two-gluon interaction with propagator

Four-gluon vertex interaction

Tenemos *vertices* de tres y cuatro gluones y un *propagador*, para la interacción: $gg \rightarrow gg$. Si queremos calcular la interacción entre mas gluones encontramos muchas diagramas de Feynman (nivel árbol):

número gluones	3	4	5	6	7	8
número diagramas F.	1	4	25	220	2485	34300

Vemos que el calculo es complicado, pero consideramos el resultado:

$$A_n(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+) = \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad (76)$$

(Parke-Taylor formula) Parke-Taylor conjetura (probado mas tarde). Las expresiones $\langle kl \rangle$ vemos mas abajo. Obviamente el resultado es simple, pero el camino muy complicado! La pregunta es si hay otro camino para llegar al resultado?

8.2 Amplitudes

Idea es fijar los amplitudes con principios básicos como

- localidad (interacciones con vertices)
- unitaridad (manteniendo $\langle X|Y \rangle = \langle X'|Y' \rangle$)
- simetría de Lorentz

9 Espinores de Weyl

Consideramos partículas sin masa. Pensamos hoy que las masas de todas las partículas elementales aparecen sobre una interacción con el bosón de Higgs. Hemos visto que con las transformaciones de Lorentz se mezclan tiempo-espacio y también energía-momento.

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \text{con } E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (77)$$

Eso es un vector en 4 dimensiones. Aparece no adecuado describir el momento de una partícula con 4 componentes, que tiene en realidad solamente 2 grados de libertad.

Consideramos partículas con espín $s = 1/2$, con dos estados $s_z \in \{-1/2, +1/2\}$, escribimos los estados corto como

$$\begin{pmatrix} |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \quad (78)$$

La partícula aparece naturalmente en dos dimensiones correspondiente a sus dos estados. Conexión entre los cuatro dimensiones de p^μ y los dos estados: Vector de Pauli con base

$$\text{matrices de Pauli: } \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Definimos el *Pauli vector*

$$p \equiv p_\mu \sigma^\mu = p_0 \sigma^0 + p_1 \sigma^1 + p_2 \sigma^2 + p_3 \sigma^3 = \begin{pmatrix} -E - p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -E - p_3 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

El rango de la matrix para una partícula sin masa:

$$\det(p) = p^\mu p_\mu = m^2 = 0, \quad \text{rank}(p) = 1. \quad (81)$$

Eso nos permite escribir p como el producto de un vector de columna por un vector de línea:

$$p_{ab} \equiv -|p\rangle_a \langle p|_b, \quad a, b \in \{1, 2\}. \quad (82)$$

El menos es convención. Indices con punto o sin punto son ahora nada mas que distintos indices. Los vectores $|p\rangle_a$ y $\langle p|_b$ se llaman *vectores de Weyl*. Definimos ($\epsilon U - U^* \epsilon$ de una matrix $U \in SU(2)$),

$$(\epsilon^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\epsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |p\rangle^a \equiv \epsilon^{ab} |p\rangle_b, \quad |p\rangle^{\dot{a}} \equiv \epsilon^{\dot{a}b} \langle p|_b. \quad (83)$$

Se puede ver que las siguientes expresiones son invariantes de Lorentz:

$$\langle pq \rangle \equiv \langle p|_{\dot{a}} \cdot |q\rangle^{\dot{a}}, \quad [pq] \equiv [p]^{\dot{a}} \cdot |q\rangle_{\dot{a}}. \quad (84)$$

9.1 Partículas con espín mayor

Si escribimos una partícula con $s = 1/2$ y $s_z \in \{-1/2, +1/2\}$ mas corto como

$$|\uparrow\rangle : \quad s = 1/2, s_z = +1/2 \quad (85)$$

$$|\downarrow\rangle : \quad s = 1/2, s_z = -1/2 \quad (86)$$

$$(87)$$

Podemos ahora construir representaciones de partículas con espín 1. La representación simétrica del producto tensorial es, (se puede diagramáticamente ver con Young tableaux)

$$|s = 1\rangle = \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle) \\ |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle \end{pmatrix} \quad (88)$$

Con productos *tensoriales* de combinaciones $||\rangle\rangle$ construimos estados con espín uno. Parecido podemos construir representaciones con espín $3/2, 2, 5/2, \dots$

10 Amplitudes

10.1 Helicity de partícula con espín 1/2

Hemos visto que podemos construir $p_{ab} = -|p\rangle_a \langle p|_b$. Vemos que p_{ab} es invariante bajo las transformaciones simultaneas:

$$\langle p| \rightarrow t\langle p|, \quad |p\rangle \rightarrow \frac{1}{t}|p\rangle. \quad (89)$$

Una partícula sin masa no tiene respos. Hay un sistema de referencia en que su 4-vector e $p = (E, 0, 0, p_z)^T$. Queda como simitria $SO(2)$ como rotaciones en el plano x y y alrededor de z . Eso corresponde a la simetria de un ángulo, es decir un parametro, que exactamente es el parametro t de las transformaciones de los vectores de Weyl,

$$SO(2) \equiv U(1) \quad (90)$$

10.2 Helicidad

Definición de operador de helicidad:

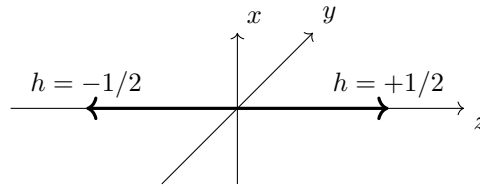
$$h = \frac{1}{2} \frac{\sigma \cdot p}{|p|}. \quad (91)$$

Eso es la proyección del espín al eje del movimiento. En caso de una partícula en dirección z :

$$h = \frac{1}{2} \sigma_z \quad \text{con eigenvalores } \pm 1. \quad (92)$$

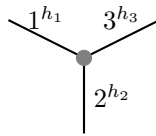
Se puede ver que

$$|p\rangle \quad \text{helicidad } h = -1/2, \quad |p\rangle \quad \text{helicidad } h = +1/2, \quad (93)$$



10.3 Interacción entre 3 partículas

Consideramos la ineracción entre 3 partículas con helicidades h_1, h_2, h_3 .



Consideramos todos los invariantes de Lorentz posible con potencias arbitrarias. No esperamos algo como raizes o el logaritmo en el resultado. Ansatz:

$$A_3(1^{h_1} 2^{h_2} 3^{h_3}) = c \cdot \langle 12 \rangle^a \langle 23 \rangle^b \langle 31 \rangle^c \quad (94)$$

Podríamos pensar en expresiones en lugar de $[ij]$. Se puede ver que no se pueden mezclar expresiones de los dos tipos en interacciones de tres partículas (por conservaci'on de energía-momento). Una alternativa seria $[12]^a [23]^b [31]^c$ pero excluido por consideraciones de dimensiones. Para partículas sin masa esperamos la siguiente transformación de la amplitud:

$$\begin{aligned} s = 0 : & \quad \text{escalar,} \\ s = 1/2 : & \quad \langle i| \sim \langle p| \rightarrow t\langle i|, \\ s = 1 : & \quad \langle i| \sim \langle p| \langle p| \rightarrow t^2 \langle i|, \\ s = 3/2 : & \quad \langle i| \sim \langle p| \langle p| \langle p| \rightarrow t^3 \langle i|, \\ s : & \quad \langle i| \sim t^{2h} \langle i|. \end{aligned} \quad (95)$$

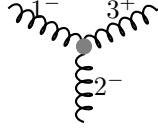
Eso nos permite fijar la interacción por escalar del grupo pequeño de Lorentz:

$$-2h_1 = a+c, \quad -2h_2 = a+b, \quad -2h_3 = b+c, \quad a = h_3-h_1-h_2, \quad b = h_1-h_2-h_3, \quad c = h_2-h_1-h_3. \quad (96)$$

Menos una constante esta fijado la amplitud,

$$A_3(1^{h_1}2^{h_2}3^{h_3}) = c \cdot \langle 12 \rangle^{h_3-h_1-h_2} \langle 23 \rangle^{h_1-h_2-h_3} \langle 31 \rangle^{h_2-h_1-h_3}. \quad (97)$$

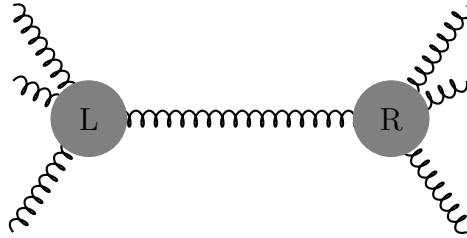
Ejemplo: Interacción de tres gluones, $g(1^{-1})g(2^{-1})g(3^{+1})$:



$$A_3(1^{-1}2^{-1}3^{+1}) = c \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 13 \rangle \langle 23 \rangle}. \quad (98)$$

10.4 Unitaridad

Factorización de BCFW



The factorización es

$$A_n = \hat{A}(L) \frac{1}{P^2} \hat{A}(R) \quad (99)$$

Los amplitudes \hat{A} son amplitudes con momenta externa continua analítica. Recursión: Pegar amplitudes elementales $A_3(1^{h_1}2^{h_2}3^{h_3})$ formando amplitudes entre las partículas elementales. Con estos metodos se puede probar la formula de Parke-Taylor,

$$A_n(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+) = \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad (100)$$

Hoy se usan los metodos de amplitudes on-shell en calculaciones de QCD, gravitación, etc. Las lineas representan partículas on-shell (en comparacion con diagramas de Feynman), no hay redundancias de *gauge*. Calculos transparente.

11 Conclusión

- Las leyes de la naturaleza aparecen simétricos bajo rotaciones, boosts, translaciones.
- Partículas como representaciones invariantes de Poincaré aparecen con espín 0, 1/2, 1, 3/2, ...
- Observamos estas representaciones en la naturaleza.
- Interacción elemental transforma con respecto al grupo pequeño de Lorentz.
- Interacciones con amplitudes (al menos al nivel árbol) la unica posibilidad basado en localidad, unitaridad (factorización), simetría de Lorentz!

Literatura

- Lewis H. Ryder *Quantum Field Theory*, Second edition, Cambridge University Press.
- Richard P. Feynman *The Feynman Lectures on Physics*, Caltech <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>.
- Henriette Elvang, Yu-tin Huang *Scattering Amplitudes*, ArXiv: <https://inspirehep.net/literature/1247066>.
- Ruth Britto, Freddy Cachazo, Bo Feng, Edward Witten *Direct proof of tree-level recursion relation in Yang-Mills theory* (2005), ArXiv: <https://inspirehep.net/literature/674518>.